

Chapitre 4 : Espaces vectoriels

La notion d'espace vectoriel généralise les propriétés de $\mathbb{R}^n$ et de l'ensemble des matrices $M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Rappel notation: E, F ensembles

$$E \times F = \{ (e, f) \mid e \in E, f \in F \} \quad \text{produit cartésien de 2 ens.}$$

$$(ex : \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}}_{n \text{ fois}})$$

Définition 33 (espace vectoriel).

On appelle *espace vectoriel* (**réel**) un **ensemble non-vide** V composé d'éléments sur lesquels on définit une opération d'addition et une opération de multiplication par un scalaire dans $\mathbb{R}$

$$+ : V \times V \rightarrow V$$

$$(u, v) \mapsto u + v$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times V \rightarrow V$$

$$(\lambda, v) \mapsto \lambda v$$

telles que les propriétés suivantes soient satisfaites :

0) $u + v \in V$ et $\lambda u \in V$; (déf. des opérations)

1) $u + v = v + u$ pour tout $u, v \in V$; (commutativité)

2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ pour tout $u, v, w \in V$; (asso.)

3) Il existe un élément de V , noté 0_V , tel que $u + 0_V = u$ pour tout $u \in V$;
(vecteur nul, élément neutre pour l'addition)

4) Pour tout $u \in V$, il existe un élément noté $-u \in V$ tel que

$$u + (-u) = 0_V; \quad (-u \text{ est l'opposé de } u)$$

5) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ pour tout $u, v \in V$ et $\lambda \in \mathbb{R}$;

6) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ pour tout $u \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

7) $\lambda(\mu u) = (\lambda\mu)u$ pour tout $u \in V$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$;

8) $1 \cdot u = u$ pour tout $u \in V$.

↑
nbc réel

} distributivité mixte

asso. mixte

axiomes

On appelle les éléments de V des vecteurs, notés $v \in V$.

Dans $\mathbb{R}^n$, on note les vecteurs $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$.

Remarque

On peut également définir des espaces vectoriels rationnels en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{Q}$ ou des espaces vectoriels complexes en remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$.

général

Propriétés Pour tout espace vectoriel V , on a :

(P₁) 0_V est unique

(P₂) l'opposé de v pour l'addition est unique

(P₃) $\underset{\substack{\uparrow \\ \in \mathbb{R}}}{0} \cdot u = 0_V \quad \forall u \in V$

(P₄) $(-1) \cdot u = -u \quad \forall u \in V$

(P₅) $\lambda \cdot 0_V = 0_V \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

Preuve: en exercice

Exemples classiques

1) Pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{R}^n$ est un espace vectoriel réel.

(propriétés alg. de $\mathbb{R}^n$ p. 29)

2) L'ensemble des matrices $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel réel.

(opérations matricielles p. 66)

3) L'ensemble des fonctions réelles $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ muni des opérations

- la fct $f+g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$
- la fct $\lambda f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $(\lambda f)(x) = \lambda \cdot f(x)$

est un espace vectoriel réel.

Remarque

1) $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel réel ($\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$!) et rationnel : $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(\lambda, v) \mapsto \lambda v \in \mathbb{R}$ (ok)

2) $\mathbb{Q}$ est un espace vectoriel rationnel mais pas réel :
 $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$
 $(\lambda, v) \mapsto \lambda v \in \mathbb{Q}$ (ok) $(\lambda, v) \mapsto \lambda \in \mathbb{Q}$ pas toujours ok :
 $\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} \notin \mathbb{Q}$!

L'ensemble des polynômes à coefficients réels

Pour $n \geq 0$, on définit

$\mathbb{P}_n = \{ p(t) = a_n t^n + a_{n-1} t^{n-1} + \dots + a_2 t^2 + a_1 t + a_0 \mid a_i \in \mathbb{R} \}$
 $0 \leq i \leq n$
l'ens. des polynômes de degré au plus
égal à n .

Ex: $\frac{1}{2}t^2 - 2t + 3 \in \mathbb{P}_2$ mais aussi $\mathbb{P}_3, \mathbb{P}_4$ etc.
 $\notin \mathbb{P}_1$

$$a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = -2, \quad a_0 = 3$$

Opérations:

$$p(t) = a_n t^n + \dots + a_1 t + a_0$$

$$q(t) = b_n t^n + \dots + b_1 t + b_0$$

$$p(t) + q(t) = (a_n + b_n) t^n + \dots + (a_1 + b_1) t + a_0 + b_0$$

$$\lambda p(t) = (\lambda a_n) t^n + \dots + (\lambda a_1) t + \lambda a_0$$

Exercice: Montrer que $\mathbb{P}_n$ est un EV réel.

On définit $\bigcup_{n \geq 0} \mathbb{P}_n = \mathbb{P}$ l'ens. des polynômes.

Exercice: Montrer que $\mathbb{P}$ est un EV.

4.1 Sous-espaces vectoriels

Soit $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$. Alors $\text{span}\{\vec{v}\}$ est un $EV \subset \mathbb{R}^2$

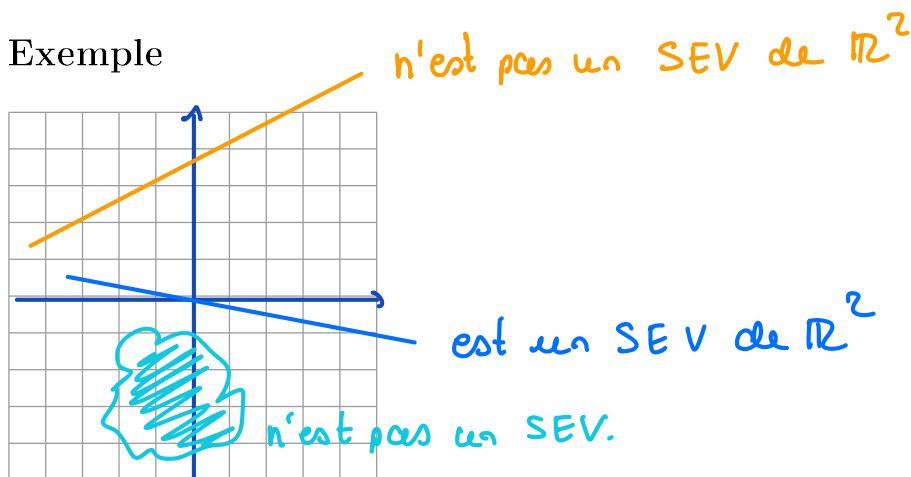
On dit que $\text{span}\{\vec{v}\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$ (SEV)

Définition 34 (sous-espace vectoriel).

Soit V un espace vectoriel (EV). On appelle *sous-espace vectoriel* une partie W de V telle que

- 1) $0_V \in W$
- 2) $\forall v, w \in W, v + w \in W$ (stabilité pour l'addition)
- 3) $\forall v \in W$ et $\lambda \in \mathbb{R}, \lambda v \in W$ (stab. pour la mult. par un scalaire)

Exemple



Remarques

- 1) Pour vérifier qu'une partie $W \subset V$ d'un EV est un SEV, il suffit de vérifier les 3 axiomes.
En conséquence, W satisfait les axiomes de la déf. 33 et sera automatiquement un EV.
- 2) Tout $V \subset V$ est un SEV de lui-même.

Exemples

- 1) $\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\text{span} \{ \vec{v} \}$ est un SEV de $\mathbb{R}^2$.
- 2) $\forall \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\text{span} \{ \vec{v}, \vec{w} \}$ est un SEV de $\mathbb{R}^3$.
- 3) $\mathbb{P}$ est un EV.
 $\mathbb{P}_n \subset \mathbb{P}$ est un SEV de $\mathbb{P}$. On peut en déduire que $\mathbb{P}_n$ est un EV, dont la structure est induite par celle de $\mathbb{P}$.
- 4) Soit V un EV. Alors $\{0_V\}$ est un SEV de V .
C'est le plus petit possible.
⚠ $\{v\}$ avec $v \neq 0_V$ n'est pas un SEV de V .

Sous-espaces vectoriels engendrés par une partie d'un espace vectoriel V

Définition 35 (span ou vect).

Soit V un espace vectoriel et $v_1, \dots, v_p$ des vecteurs de V . L'ensemble des combinaisons linéaires de $v_1, \dots, v_p$ s'appelle le *span*.

Théorème 29. *Soient $v_1, \dots, v_p$ des éléments d'un espace vectoriel V . Alors*

Preuve

Exemple

Définition 36 (famille génératrice).

On dira que $\{v_1, \dots, v_p\}$ est une *famille génératrice* de $\text{span}\{v_1, \dots, v_p\}$.

Exemple

4.2 Applications linéaires, noyaux et images

Définition 37 (application linéaire).

Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$. On dit que T est une *application linéaire* si elle associe à tout élément v de V un unique élément $T(v)$ de W et si T vérifie

1.

2.

Exemples

Définition 38 (noyau d'une application linéaire).

Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Le *noyau* de l'application T est l'ensemble

Exemple

Définition 39 (image d'une application linéaire).

Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. L'*image* de l'application T est l'ensemble

Exemple

Théorème 30. *Soient V et W deux espaces vectoriels et $T : V \rightarrow W$ une application linéaire. Alors*

- 1. $\text{Ker}(T)$ est un sous-espace vectoriel de V .*
- 2. $\text{Im}(T)$ est un sous-espace vectoriel de W .*

Preuve

Cas particulier des matrices

Définition 40 (noyau d'une matrice).

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Le *noyau de la matrice* A , noté $\text{Ker}(A)$, est l'ensemble

Théorème 31. *Le noyau d'une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

Définition 41 (image d'une matrice).

Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. L'*image de* A , notée $\text{Im}(A)$, est l'ensemble

Théorème 32. *Soit $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$. Alors $\text{Im}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$.*

Preuve

Exemple